

ΑΛΓΕΒΡΑ – τελική εξέταση

(15/09/09)

4. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_3 - 12x_4 - 17x_5 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

α) Βρείτε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του παραπάνω συστήματος.

β) Βρείτε και χαρακτηρίστε τη λύση του συστήματος.

γ) Βρείτε μια βάση για το χώρο S των λύσεων του συστήματος.

δ) Ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(2, 2, 10, 1, 2)$ ανήκει στον S .

(2 μονάδες)

Απ:

$$\begin{aligned} \text{α) Είναι: } \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -12 & -17 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -12 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 + \frac{1}{4}r_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -12 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{r_1 \rightarrow \frac{1}{2}r_1, r_2 \rightarrow \frac{1}{2}r_2 \\ r_3 \rightarrow \frac{1}{4}r_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{β) Επομένως θα είναι: } \begin{cases} x_1 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_4 - x_5 \\ x_2 = x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = 4x_4 + 3x_5 \end{cases}, \text{ δηλαδή το σύστημα είναι αόριστο και,}$$

θέτοντας $x_4 = k$, $x_5 = m$, παρατηρούμε ότι το σύστημα παρουσιάζει διπαραμετρική απειρία λύσεων της

$$\text{μορφής: } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(4k - m, k + \frac{1}{2}m, 4k + 3m, k, m \right).$$

γ) Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Για να ανήκει στο χώρο S των λύσεων του ομογενούς συστήματος, θα πρέπει:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(4x_4 - x_5, x_4 + \frac{1}{2}x_5, 4x_4 + 3x_5, x_4, x_5 \right) = x_4(4, 1, 4, 1, 0) + x_5(-1, \frac{1}{2}, 3, 0, 1)$$

Τα $u_1 = (4, 1, 4, 1, 0)$, $u_2 = (-1, \frac{1}{2}, 3, 0, 1)$ παράγουν τον S , επομένως για να αποτελούν βάση μένει να αποδειχθεί ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Είναι:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(4, 1, 4, 1, 0) + \lambda_2(-1, \frac{1}{2}, 3, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Επομένως το σύνολο $U = \{u_1, u_2\}$ αποτελεί μια βάση για το χώρο S των λύσεων του ομογενούς συστήματος.

δ)

α' τρόπος

Έστω $X=(2,2,10,1,2)$. Θα εξετάσουμε εάν υπάρχουν c_1, c_2 , τέτοια ώστε:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = X \Leftrightarrow c_1 (4, 1, 4, 1, 0) + c_2 \left(-1, \frac{1}{2}, 3, 0, 1\right) = (2, 2, 10, 1, 2) \Rightarrow \begin{cases} 4c_1 - c_2 = 2 \\ c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 2 \\ 4c_1 + 3c_2 = 10 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Άρα το X ανήκει στον S .

β' τρόπος

Το διάνυσμα X περιγράφει τις τιμές των x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ($x_1=2, x_2=2, x_3=10, x_4=1, x_5=2$). Θα εξετάσουμε εάν το σύστημα επαληθεύεται για τις τιμές αυτές. Με απλή αντικατάσταση προκύπτει ότι πράγματι επαληθεύεται, επομένως το X ανήκει στον S .

5. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + y)$.

α) Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις standard βάσεις $E_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $E_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

β) Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις $V = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ και $W = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

γ) Δίνεται το διάνυσμα x , εκφρασμένο στη standard βάση, $x=(1, -1, 2)$. Βρείτε την εικόνα του x στις βάσεις και των δύο προηγούμενων υποερωτημάτων. **(1.5 μονάδα)**

Απ.:

α) Αρκεί να δημιουργήσουμε τον πίνακα ${}_{E_2}A_{E_3} = \begin{bmatrix} [T(e_1)]_{E_2} & [T(e_2)]_{E_2} & [T(e_3)]_{E_2} \end{bmatrix}$.

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (-1, 1) = -1(1, 0) + 1(0, 1), \text{ επομένως } {}_{E_2}A_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

β) Αρκεί να δημιουργήσουμε τον πίνακα ${}_VA_W = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_W & [T(v_2)]_W & [T(v_3)]_W \end{bmatrix}$.

$$T(v_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2) = -1(1, 0) + 2(1, 1)$$

$$T(v_2) = T(1, 1, 0) = (0, 3) = -3(1, 0) + 3(1, 1), \text{ επομένως } {}_VA_W = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$T(v_3) = T(1, 1, 1) = (1, 3) = -2(1, 0) + 3(1, 1)$$

γ) Έστω $Y=AX$ η εικόνα του X .

Ως προς τις E_3, E_2 :

$$[Y]_{E_2} = {}_{E_2}A_{E_3} [X]_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ως προς τις V, W :

α' τρόπος

Έχοντας βρει το Y στη βάση E_2 , αρκεί να εκφράσουμε τις συντεταγμένες του ως προς τη βάση W .

$$\text{Με τη γνωστή διαδικασία θα βρούμε } \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ επομένως } [Y]_W = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

β' τρόπος

Εναλλακτικά, μπορούμε να εκφράσουμε το δοσμένο X στη βάση V και χρησιμοποιώντας τον πίνακα ${}_VA_W$ να λάβουμε την εικόνα του X απευθείας στη βάση W . Κατά τα γνωστά θα είναι:

$$[X]_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή } [X]_V = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ οπότε } [Y]_W = {}_VA_W[X]_V = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .

β) Βρείτε έναν πίνακα P που να διαγωνοποιεί τον A .

γ) Γιατί ο διαγωνοποιημένος πίνακας έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον αρχικό πίνακα A ;

(1.5 μονάδα)

Απ.:

α) Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A : $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)[(4-\lambda)(1-\lambda) - 1(-2)] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A :

- Για $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & -4 \\ 0 & 4-\lambda_1 & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

επομένως $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 είναι το: $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Για $\lambda_2 = 2$: $\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 2 & -4 \\ 0 & 4-\lambda_2 & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

επομένως $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι το: $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Για $\lambda_3 = 3$: $\begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 2 & -4 \\ 0 & 4-\lambda_3 & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$

επομένως $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_3 είναι το: $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

β) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας είναι εκείνος του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του δοσμένου πίνακα A, δηλαδή:

$$P = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι μια διαγωνοποίηση του A είναι η $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$, όπου $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

γ) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι οι πίνακες Δ και A έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές επειδή είναι όμοιοι πίνακες.

Απόδειξη:

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες των τετραγωνικών πινάκων $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ και $PI = IP = P$, καθώς και τις ιδιότητες των οριζουσών $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ και $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ έχουμε:

$$\det(\Delta - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) = \det[P^{-1}(AP - \lambda IP)] = \det[P^{-1}(A - \lambda I)P]$$

$$\det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$$

Δηλαδή οι πίνακες Δ και A έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση κι επομένως τις ίδιες ιδιοτιμές.